Даннная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по статфизике
Мостовому Сергею Дмитриевичу

До перерыва: С.Д.: Сколько мела! За перерыв выберите мне мел!
После перерыва: С.Д.: Какой мел выбрали?
Студенты показывают на длинный, Мостовой берёт в руку короткий.
С.Д.: Выбрать вы выбрали, но я не обещал, что буду его использовать.

33. Доказать лемму Больцмана и получить из нее H-теорему Больцмана. Какова причина появления необратимости во времени полученного результата?

Вообще Н-функцией называется вот такая функция:

$$H = \iiint F(t, \vec{r_1}, \dots, \vec{r_n}, \vec{p_1}, \dots, \vec{p_n}) lnF(\dots) d^3\vec{r_1} \dots d^3\vec{r_n} d^3\vec{p_1} \dots d^3 \vec{p_n}$$

Она была придумана как способ изобразить, насколько далеко или близко мы к положению равновесия.

Вообще Квасников (и вместе с ним ещё все семинаристы) ещё дописывают коэф $\frac{1}{(2\pi h)^3}$, но он ни на что не влияет, так что мы его опустим.

По своей форме она похожа на энтропию, но не с тем знаком. Это сходство не случайно: при определённом условии она всегда убывает со временем.

Условие должно быть наложено на интеграл столкновений и таково:

$$\iiint \Phi(\vec{p}) * \text{интеграл столкновений} * d^3\vec{p} = \frac{1}{4} \iiint \text{не дописал}$$

Полученный результат (убывание Н при росте t) называется леммой Больцмана. Не путать с уравнением Больцмана, которое было раньше!

Доказывать в общем случае не будем, рассмотрим частный случай, когда уровни дискретны и справедливо уравнение кинетического баланса.

Обозначается Н-функция буквой Н, что очень неудобно, т.к. этой же буквой обозначается гамильтониан.

Задача 59.

Доказать Н-теорему Больцмана на основе кинетического уравнения Паули (уравнения кинетического баланса).

Запишем уравнение кинетического баланса с дискретными уровнями. Почему дискретными? Так проще и так делает Мостовой (вы же ему верите?)

$$\dot{N_i} = \frac{dN_i}{dt} = \sum_{k \neq i} (N_k w_{ki} - N_i w_{ik})$$

Ну и запишем H-функцию:

$$H = \sum_i N_i \ln N_i$$

Нужно доказать, что эта штука возрастает со временем. Продифференцируем её:

$$\dot{H} = \sum_i \dot{N}_i \ln N_i$$

Сюда нужно подставить красный результат для N_i. Получим

$$\dot{H} = \sum_{i \neq k} (N_k w_{ki} - N_i w_{ik}) \ln N_i = \sum_{i \neq k} (N_k - N_i) w_{ki} \ln N_i$$

Симметрия нам позволяет записать результат иначе:

$$\dot{H} = \sum_{i \neq k} (N_i - N_k) w_{ik} \ln N_k$$

Давайте возьмём среднее арифметическое этих выражение:

$$\dot{H} = \sum_{i \neq k} (N_k - N_i) w_{ki} \ln \frac{N_i}{N_k}$$

Отметим, что для любых положительных a,b верно равенство

$$(b - a) \ln \frac{a}{b} < 0$$

Откуда следует $\dot{H} < 0$ ч.т.д.

20. Показать, что локальное распределение Максвелла при подстановке в качестве одночастичной функции распределения в интеграл столкновений Больцмана обращает его в нуль. Каков физический смысл соответствующего значения H-функции?

Сначала, что это значит. H-функция отражает, насколько мы близки к положению равновесия. Максвелл – это есть распределение равновесия, так что там производная H-функции по времени будет 0.

Что, кстати, такое «локальное» распределение Максвелла?

$$\mathcal{F}(\vec{r}, \vec{p}) = n(\vec{r}) \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi m\theta(\vec{r}))^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(\vec{p} - \vec{p_0}(\vec{r}))^2}{2m\theta(\vec{r})} \right\}$$

У него в каждой точке своя концентрация $n(\vec{r})$, своя температура $\theta(\vec{r})$, свой средний импульс $p_0(\vec{r})$. Поэтому оно и локальное.

Собственно, задача сводится в подстановке выражения выше в больцмановский интеграл столкновений:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{1}{v} \int (f' f_1' - f f_1) u d\omega d\vec{p}_1$$